EZ-OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sin\lambda+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad \forall\lambda\in(0,\pi/2)$

(2 puntu)

$$\forall\lambda\in(0,\pi/2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(2\sin\lambda+\frac{1}{n}\right)^n=\left(2\sin\lambda\right)^{\infty}\overset{(*)}{=}\begin{cases}0 & \lambda<\dfrac{\pi}{6}\\ \infty & \lambda>\dfrac{\pi}{6}\\ 1^{\infty} & \lambda=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\overset{(**)}{=}\begin{cases}0 & \lambda<\dfrac{\pi}{6}\\ \infty & \lambda>\dfrac{\pi}{6}\\ e & \lambda=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$(*)\begin{cases}\forall\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right) \;\Rightarrow\; 0<\sin\lambda<\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2\sin\lambda<1\\ \forall\lambda\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2}<\sin\lambda<1 \;\Rightarrow\; 2\sin\lambda>1\\ \lambda=\dfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \sin\lambda=\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\sin\lambda=1\end{cases}$$

$$(**)\ \lambda=\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

2.- Adierazi, arrazoituta, baieztapen hauek egiazkoak edo faltsuak diren:

a) Baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie konbergentea bada, $\{a_n\}$ segida konbergentea da.

b) Baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie dibergentea bada, $\{a_n\}$ segida dibergentea da.

c) Baldin eta $\{a_n\}$ segida konbergentea bada, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie konbergentea da.

d) Baldin eta $\{a_n\}$ segida dibergentea bada, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea ez da konbergentea.

(2 puntu)

a) Egiazkoa:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie konbergentea bada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\}$ konbergentea da.

b) Faltsua:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da, eta $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, berriz, konbergentea da $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}\right)$

c) Faltsua:

Aurreko adibide berak balio du.

d) Egiazkoa:

$\{a_n\}$ segida dibergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (edo, $-\infty) \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ezin da konbergentea izan (konbergentziarako Baldintza Beharrezkoa betetzen ez baita).

3.- a) Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}\left(1+x^3\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Aurreko ataleko emaitza $x=1$ puntuan ebaluatzen badugu, lortzen den zenbakizko seriearen batura $\mathrm{L}(2)$ dela ateratzen da. Serie horretako zenbat gai batu behar ditugu, $\mathrm{L}(2)$-ren balio hurbildua lortzeko, errorea 0.1 baino txikiagoa izanik?

(2 puntu)

a) $f(x)=\mathrm{L}\left(1+x^3\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^3}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}3x^2\cdot\left(-x^3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3x^{3n+2} \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) $r=-x^3$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da beraz, konbergentea da $\Leftrightarrow \quad |r|=|x|^3<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<1$

Eta, integratuz:

$$f(x)=\mathrm{L}\left(1+x^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3\frac{x^{3n+3}}{3n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+3}}{n+1} \quad \forall x\in(-1,1)$$

Tarte horretako mugak aztertuz:

$x=-1$ puntuan: $\nexists f(-1)$

$$x=1 \text{ puntuan: } \begin{cases}\exists f(1)=\mathrm{L}(2),\text{ eta, } f \text{ jarraitua da}\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+3}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da (**)} \Rightarrow \exists\text{batura jarraitua}\end{cases}$$

(**) Absolutuki konbergentea ez den serie alternatua da, baina Leibnizen teorema egiaztatzen du.

Beraz, $f(x)=\mathrm{L}\left(1+x^3\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+3}}{n+1} \quad \forall x\in\left(-1,1\right]$

b) Aurreko ataleko emaitza $x=1$ puntuan ebaluatzen badugu:

$$f(1)=\mathrm{L}(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Eta, lehen azaldu dugunez, serie alternatu honek Leibnizen teorema egiaztatzen du, beraz:

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|$$

non, kasu honetan, $S=f(1)=\mathrm{L}(2)$. Orduan:

$$|S-S_n|<\frac{1}{n+2}\leq\frac{1}{10} \quad\Leftrightarrow\quad n+2\geq 10 \quad\Leftrightarrow\quad n\geq 8$$

Beraz, 9 batugai batu behar ditugu (batukaria $n=0$-tik hasten baita).

4.- Diferentziala erabiliz, kalkulatu $f(1.1,-0.1)$**-ren** **<u>balio hurbildua</u>, non** $f(x,y)=e^{xy}$**.**

(2 puntu)

f diferentziagarria da $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ deribatu jarraituak dituelako eremu horretan. Eta, ondorioz:

$$f \text{ diferentziagarria da} \Leftrightarrow \Delta f \simeq df$$

Beraz:

$$\Delta f = f(1.1,-0.1)-f(1,0)\simeq df(1,0)=f'_x(1,0)\cdot dx+f'_y(1,0)\cdot dy$$

non $dx=0.1$ eta $dy=-0.1$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=ye^{xy} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,0)=0 \\ f'_y(x,y)=xe^{xy} \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,0)=1 \\ f(1,0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1.1,-0.1)\simeq f(1,0)+df(1,0)=1-0.1=0.9$$

5.- Izan bedi $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, non *f* funtzio diferentziagarria den. Kalkulatu hurrengo adierazpenaren balioa:

$$E \equiv x^2 \cdot z''_{x^2} + 2xy \cdot z''_{xy} + y^2 \cdot z''_{y^2}$$

(3 puntu)

$z = f\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(u)$ non $u = \dfrac{y}{x}$.

Orduan, $\begin{cases} z'_x = f'(u) \cdot u'_x = -\dfrac{y}{x^2} \cdot f'(u) \\ z'_y = f'(u) \cdot u'_y = \dfrac{1}{x} \cdot f'(u) \end{cases}$

Eta, $\begin{cases} z''_{x^2} = \dfrac{2y}{x^3} \cdot f'(u) - \dfrac{y}{x^2} \cdot f''(u) \cdot u'_x = \dfrac{2y}{x^3} \cdot f'(u) + \dfrac{y^2}{x^4} \cdot f''(u) \\ z''_{xy} = -\dfrac{1}{x^2} \cdot f'(u) - \dfrac{y}{x^2} \cdot f''(u) \cdot u'_y = -\dfrac{1}{x^2} \cdot f'(u) - \dfrac{y}{x^3} \cdot f''(u) \\ z''_{y^2} = \dfrac{1}{x} \cdot f''(u) \cdot u'_y = \dfrac{1}{x^2} \cdot f''(u) \end{cases}$

Beraz,

$$E \equiv x^2 \cdot \left(\frac{2y}{x^3} \cdot f'(u) + \frac{y^2}{x^4} \cdot f''(u)\right) + 2xy \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot f'(u) - \frac{y}{x^3} \cdot f''(u)\right) + y^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cdot f''(u)\right) =$$

$$= \frac{2y}{x} \cdot f'(u) + \frac{y^2}{x^2} \cdot f''(u) - \frac{2y}{x} \cdot f'(u) - \frac{2y^2}{x^2} \cdot f''(u) + \frac{y^2}{x^2} \cdot f''(u) = 0$$

6.- Aurkitu $x+y+z=1$ ekuazioak baldintzaturiko $f(x,y,z)=x\cdot \mathrm{L}x+y\cdot \mathrm{L}y+z\cdot \mathrm{L}z$ funtzioaren mutur erlatiboak.

(2 puntu)

Lagrangeren biderkatzaileen metodoa erabiliz, hurrengo funtzio laguntzailearen puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

$$w(x,y,z)=x\cdot \mathrm{L}x+y\cdot \mathrm{L}y+z\cdot \mathrm{L}z+\lambda\left(x+y+z-1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=\mathrm{L}x+1+\lambda=0 \\ w'_y=\mathrm{L}y+1+\lambda=0 \\ w'_z=\mathrm{L}z+1+\lambda=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=z \\ x+y+z=1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad 3x=1 \quad \Rightarrow \quad x=y=z=\frac{1}{3}$$

Orduan, puntu kritiko bakarra dugu: $P=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Eta, sailkatzeko, $d^2w(P)$ -ren zeinua aztertuko dugu:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=\frac{1}{x} \\ w''_{y^2}=\frac{1}{y} \\ w''_{z^2}=\frac{1}{z} \\ w''_{xy}=w''_{xz}=w''_{yz}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2w(P)=3(dx)^2+3(dy)^2+3(dz)^2>0 \quad \forall(dx,dy,dz)\neq(0,0,0) \\ x+y+z=1 \quad \Rightarrow \quad dx+dy+dz=0 \end{array}\right.$$

Beraz, P minimo erlatibo baldintzatua da.

<u>Oharra</u>: $d^2w(P)=3(dx)^2+3(dy)^2+3(dz)^2\geq 0$ ezin da izan. Izan ere,

$d^2w(P)=3(dx)^2+3(dy)^2+3(dz)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad dx=dy=dz=0$, ezinezkoa dena.

7.- a) Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} 3-z \geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leq 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

b) Kalkulatu aurreko solidoa mugatzen duen paraboloidearen zatiaren azalera.

(3.5 puntu)

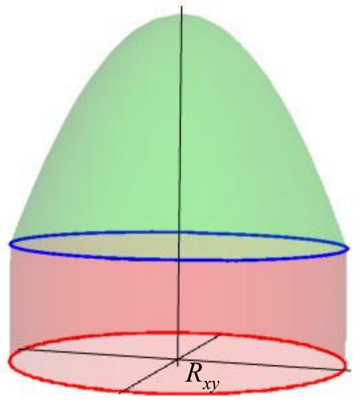
a) $3-z=x^2+y^2$ paraboloidearen eta

$x^2+y^2=2$ zilindroaren arteko ebakidura:

$3-z=x^2+y^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad z=1 \quad \Rightarrow$

$C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=1 \end{cases}$ (urdinez marrazkian)

Beraz, $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 3-\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$



Eta, zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq 3-\rho^2 \end{cases}$

$$Bol(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(3-\rho^2\right)d\rho = 2\pi\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(3-1)=4\pi$$

b) V-ren mugako $z=3-\left(x^2+y^2\right)$ gainazalaren zatiaren azalera $=\iint_S dS = \iint_{R_{xy}} |\vec{N}| dxdy$

non $S \equiv z=3-\left(x^2+y^2\right) \quad \forall(x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \leq 2$

Orduan, $\vec{N}=(2x,2y,1) \quad \Rightarrow \quad |\vec{N}|=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$

Eta, polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases}$

$$\text{Beraz, } Azalera(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1+4\rho^2} \, d\rho \, d\theta = 2\pi \left.\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13\pi}{3}$$

8.- $\vec{F}(x,y,z) = -x^2 \cdot \vec{i} + 2xy \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ **eremu bektoriala emanik,**

a) Kalkulatu $4x^2+4y^2=(z-4)^2$ **konoak (**$2 \le z \le 4$ **izanik) eta** $z=2$ **planoak osaturiko gainazal itxia zeharkatzen duen fluxua.**

b) Kalkulatu $z=2$ **eta** $z=4$ **planoen arteko konoaren zatia zeharkatzen duen fluxua.**

c) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa** $C \equiv \begin{cases} 4x^2+4y^2=(z-4)^2 \\ z=2 \end{cases}$ **kurban zehar.**

d) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren lerro-integrala** C **kurban zehar,** $A=(1,0,2)$ **puntutik** $B=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)$ **puntura.**

(3.5 puntu)

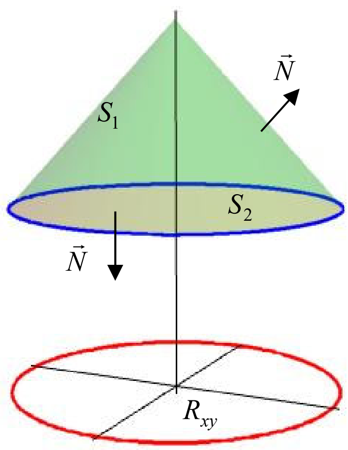
a) $4x^2+4y^2=(z-4)^2$ konoaren eta $z=2$ planoaren arteko ebakidura:

$$C \equiv \begin{cases} 4x^2+4y^2=(z-4)^2 \\ z=2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 4x^2+4y^2=4 \\ z=2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2 \end{cases} \quad \text{(urdinez marrazkian)}$$

Eta, $2 \le z \le 4$ izanik, konoaren zatia: $z = 4-\sqrt{4x^2+4y^2} \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$

Beraz, $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia da,

$$\text{non } \begin{cases} S_1 \equiv z = 4-2\sqrt{x^2+y^2} \\ S_2 \equiv z=2 \end{cases} \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$$



Eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, S zeharkatzen duen fluxua kalkulatzeko Gauss-en teorema erabil dezakegu:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz$$

non $V \equiv 2 \le z \le 4-2\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$ eta $div\left(\vec{F}\right) = -2x+2x+1=1$

Orduan:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V dxdydz \overset{(1)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_2^{4-2\rho} \rho dz\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho(2-2\rho)d\rho = 2\pi\left(\rho^2 - \frac{2\rho^3}{3}\right)_0^1 = 2\pi\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

(1) Zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 2 \le z \le 4-2\rho \end{cases}$

b) $S_1 \equiv z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$ konoaren zatia zeharkatzen duen fluxua $= \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy$, non

$\vec{N} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$ (begiratu aurreko marrazkia), eta,

$$\vec{F}\cdot\vec{N} = \left(-x^2, 2xy, 4-2\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) =$$

$$= \frac{-2x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{4xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} = \frac{-2x^3 + 4xy^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} - 2\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

$$\vec{F}\cdot\vec{N} = \frac{-2\rho^3\cos^3\theta + 4\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + 4\rho - 2\rho^2}{\rho} = -2\rho^2\cos^3\theta + 4\rho^2\cos\theta\sin^2\theta + 4 - 2\rho$$

Orduan:

$$\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left(-2\rho^2\cos^3\theta + 4\rho^2\cos\theta\sin^2\theta + 4 - 2\rho\right)d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos^3\theta}{2} + \cos\theta\sin^2\theta + 2 - \frac{2}{3}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos^3\theta}{2} + \cos\theta\sin^2\theta + \frac{4}{3}\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta}{2} + \cos\theta\sin^2\theta + \frac{4}{3}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{4}{3}\right)d\theta =$$

$$= \left(-\frac{\sin\theta}{2} + \frac{\sin^3\theta}{2} + \frac{4\theta}{3}\right)_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3}$$

<u>Beste era batera</u>: a) ataleko emaitzaz baliatuz,

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S} = \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \frac{2\pi}{3} - \iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S}$$

Eta, $\iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy \overset{(2)}{=} -\iint_{R_{xy}} 2dxdy = -2\cdot Azalera\left(R_{xy}\right) = -2\pi$

(2) $\vec{N}=(0,0,1)$, $\gamma>\dfrac{\pi}{2}$ (begiratu aurreko marrazkia), eta, $\vec{F}\cdot\vec{N}=z=2$

Beraz, $\displaystyle\iint_{S_1}\vec{F}d\vec{S}=\frac{2\pi}{3}-(-2\pi)=\frac{8\pi}{3}$

Argi dago, bigarren garapen hau askoz egokiagoa dela.

c) $\vec{F}$ -ren zirkulazioa C kurban zehar $\displaystyle=\oint_C\vec{F}d\vec{r}=\oint_C\left(-x^2\cdot dx+2xy\cdot dy+z\cdot dz\right)\overset{(3)}{=}$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\cdot(-\sin t)+2\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=\int_0^{2\pi}3\cos^2 t\cdot\sin t dt=-\cos^3 t\Big|_0^{2\pi}=0$$

(3) $C\equiv\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}\equiv\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\quad 0\le t\le 2\pi\\ z=2\end{cases}$

<u>Beste era batera</u>: $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, eta, C kurba itxia, sinplea eta leuna denez, Stokes-en teorema erabil genezake,

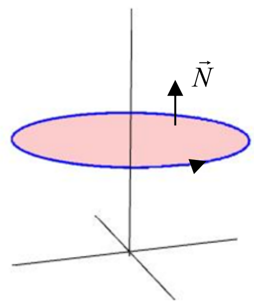
$$\oint_C\vec{F}d\vec{r}=\iint_{S_2}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}$$

Eta, $\displaystyle\iint_{S_2}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy\overset{(4)}{=}\iint_{R_{xy}}2ydxdy\overset{(5)}{=}0$

(4) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=(0,0,2y)$

Eta, C kurban zehar noranzko positiboan ibiltzen bagara, $S_2\equiv z=2$ gainazalari dagokion bektore normala gorantz norabidatuta egon behar da, beraz:

$\vec{N}=(0,0,1)$ eta $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ (alboko marrazkian erakusten denez).



(5) $R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 1$ simetrikoa da $y=0$ zuzenarekiko, eta, y funtzio bakoitia da.

d) $\displaystyle\int_{C(A\to B)}\vec{F}d\vec{r}$ kalkulatzeko, C kurbaren (3) parametrizazio naturala erabiliko dugu, integrazio-mugak aldatuz:

$$A=(1,0,2)\Leftrightarrow\begin{cases}1=\cos t\\ 0=\sin t\end{cases}\Leftrightarrow t=0,\ \text{eta},\ B=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos t\\ \frac{1}{\sqrt{2}}=\sin t\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

Orduan: $\displaystyle\int_{C(A\to B)}\vec{F}d\vec{r}=\int_0^{\pi/4}3\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=-\cos^3 t\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+1=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$